Colle du 10 février : Algèbre bilinéaire

17.1 Cours

Question de cours 1 : Définition du produit mixte et du produit vectoriel.

Question de cours 2 : Classification des éléments de $O_3(\mathbb{R})$.

Question de cours 3 : Définition d'une forme quadratique non dégénérée.

17.2 Exercices

Exercice 1 : Soient q et q' deux formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe E. On suppose que $q^{-1}(\{0\}) = q'^{-1}(\{0\})$. Que dire de q et q' ?

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ vérifiant : $\forall (i,j) \in [1,n]^2, i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2$. Soit B une boule fermée de rayon R contenant tous les x_i. Montrer que $R \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$.

Exercice 3 : Calculer : $\inf_{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1 x + ... + a_n x^n)^2 dx$.

Exercice 4 : Soient A et B deux matrices symétriques positives d'ordre n. Montrer que $(det(A))^{1/n} + (det(B))^{1/n} \leq (det(A+B))^{1/n}$.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien. **1.** Soit p un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $||p(x)|| \leq ||x||$.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p et q commutent.

Exercice 6 : On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée. Soit a un vecteur non nul, et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto a \wedge x$. Posons $g = e^f$. Montrer que $r \in O_3(\mathbb{R})$. Étudier les caractéristiques géométriques de r.

Exercice 7 : Soit A un matrice réelle symétrique définie positive. Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}a_{ji}$.

Exercice 8 : Soit $k > 0$. Montrer que $\phi : S_n^+(\mathbb{R}) \to S_n^+(\mathbb{R}), A \mapsto A^k$. Montrer que ϕ est une bijection.

Exercice 9 : Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique $(.,.)$. Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$.
1. On pose $\langle x, y\rangle = \sum_{g\in G}(g(x), g(y))$. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
2. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $SO_2(\mathbb{R})$. Que dire de G ?

Exercice 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\min_{S\in S_n(\mathbb{R})}(\sum_{i,j}(a_{ij} - s_{ij})^2)$.